BIÊN ỔN ĐỊNH CỦA HỆ PHƯƠNG TRÌNH SAI PHÂN CÓ CHẬM CHỊU NHIỄU

Bùi Thị Mộng Ngân
ĐHSTOAN12, Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.
Email: mongngan01@gmail.com

ThS. Lê Trung Hiếu
Khoa Sư phạm Toán-Tin, Trường Đại học Đồng Tháp.
Email: lthieu@dthu.edu.vn

Tóm tắt. *Chúng tôi đưa ra biên ổn định mới cho một lớp hệ phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có chậm chịu nhiễu. Một số ví dụ được đưa ra nhằm minh họa cho kết quả đạt được.*

1 Mở đầu

1.1 Một vài ký hiệu và qui ước

Gọi $\mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$ lần lượt là vành các số nguyên, trường các số thực và trường các số phức. Đặt $\mathbb{K} := \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$. Kí hiệu $\mathbb{Z}_+, \mathbb{R}_+$ lần lượt là tập số nguyên không âm và tập các số thực không âm. Với $k \in \mathbb{Z}_+$, kí hiệu các tập hợp $\underline{k} := \{1, 2, ..., k\}$ và $\underline{k_*} := \{0, 1, 2, ..., k\}$. Với hai số nguyên dương l, q, kí hiệu $\mathbb{K}^{l\times q}, \mathbb{R}_+^{l\times q}$ là tập hợp các ma trận cỡ $l \times q$ và tập hợp các ma trận thực không âm cỡ $l \times q$. Với $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{K}^n, A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{l\times q}$, kí hiệu $|x| := (|x_1|, |x_2|, ..., |x_n|)$ và $|A| := (|a_{ij}|)$. Sau đây là một số qui ước sử dụng trong bài viết này. Bất đẳng thức giữa hai ma trận $A = (a_{ij}), B = (b_{ij}) \in \mathbb{K}^{l\times q}$ được qui ước như sau: $A \geq (\leq, \gg, \ll)B$ tương đương với $a_{ij} \geq (\leq, >, <)b_{ij}$ với mọi $i \in \underline{l}, j \in \underline{q}$. Tương tự đối với so sánh hai véctơ. Chuẩn của véctơ $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{K}^n$ được xác định bởi $\|x\|_p := \sqrt[p]{|x_1|^p + |x_2|^p + ... + |x_n|^p}$ với $1 \leq p < +\infty, \|x\|_\infty := \max_{i\in\underline{n}} |x_i|$. Chuẩn của ma trận $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$ được hiểu là chuẩn toán tử và được xác định bởi $\|A\| := \max_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \max_{\|x\|=1} \|Ax\|$. Ta có tính chất quan trọng sau đây: Cho $A \in \mathbb{K}^{n\times n}, B \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$, nếu $|A| \leq B$ thì $\|A\| \leq \|B\|$, xem [9]. Với ma trận $A = (a_{ij}) \in \mathbb{K}^{n\times n}$, *bán kính phổ* của A được xác định bởi $\rho(A) = \max\{|\lambda| : \lambda \in \mathbb{C}, \det(\lambda I_n - A) = 0\}$.

Sau đây là một số tính chất quan trọng của các ma trận không âm được sử dụng thường xuyên trong bài viết này.

Định lý 1.1 ([9]). *Cho ma trận $A \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$. Khi đó,*

(i) (Định lý Perron-Frobenius) $\rho(A)$ là một giá trị riêng của A và tồn tại một véctơ không âm $x \in \mathbb{R}_+^n, x \neq 0$ sao cho $Ax = \rho(A)x$.

(ii) $(tI_n - A)^{-1}$ tồn tại và không âm khi và chỉ khi $t > \rho(A)$.

1.2 Giới thiệu

Lý thuyết ổn định của các hệ động lực được bắt đầu vào năm 1984 kể từ khi nhà Toán học người Nga Aleksandr Lyapunov (1857-1918) xuất bản những công trình nghiên cứu tiên phong của mình [4]. Đến nay, Lý thuyết ổn định của các hệ động lực đã có những bước phát triển và đạt nhiều thành tựu vượt bậc. Đồng hành với thành tựu đó, Lý thuyết ổn định của các hệ phương trình sai phân phát triển không ngừng và có ứng dụng trong nhiều ngành khoa học khác nhau như Sinh học, Kinh tế, Vật lý, Khoa học máy tính, Điều khiển học, ... ([2], [3], [8]).

Bởi tính ứng dụng trong nhiều mô hình toán học, bài toán ổn định vững (robust stability) của các hệ chịu nhiễu bắt đầu được quan tâm nghiên cứu. Năm 1986, lần đầu tiên, bán kính ổn định thực và bán kính ổn định phức của các hệ động lực (dừng, tuyến tính) không có chậm, chịu nhiễu được giới thiệu bởi Hinrichsen và Pritchard. Đến nay, các bài toán liên quan đến bán kính ổn định của các hệ động lực vẫn không ngừng thu hút sự quan tâm, khai thác không những trong lĩnh vực Lý thuyết ổn định mà còn trong Lý thuyết tối ưu và Điều khiển học (xem [1] [8], [9] và các tài liệu tham khảo trong đó). Thực tế, bài toán tìm bán kính ổn định của một hệ động lực có thể được xem là một bài toán tối ưu toàn cục. Cụ thể, xét trường hợp của hệ rời rạc có chậm

$$x(k+1) = \sum_{i=0}^{m} A_i x(k-i), \quad k \geq k_0. \tag{1.1}$$

Giả sử Hệ (1.1) ổn định, khi đó bán kính ổn định của (1.1) chịu nhiễu có cấu trúc $A_i \hookrightarrow A_i + D_i \Delta_i E_i$ ($i \in \underline{m_*}$), được xác định bởi

$$r_{\mathbb{K}} := \inf \left\{ \sum_{i=0}^{m} \|\Delta_i\| : \Delta_i \in \mathbb{K}^{l_i \times q_i}, x(k+1) = \sum_{i=0}^{m} (A_i + D_i \Delta_i E_i) x(k-i) \text{ không ổn định} \right\},$$

trong đó $A_i \in \mathbb{R}^{n \times n}$, $D_i \in \mathbb{R}^{n \times l_i}$, $E_i \in \mathbb{R}^{q_i \times n}$ ($i \in \underline{m_*}$) cho trước và $\Delta_i \in \mathbb{R}^{l_i \times q_i}$ ($i \in \underline{m_*}$) là các ma trận thay đổi.

Khi $A_i \in \mathbb{R}_+^{n \times n}$ ($i \in \underline{m_*}$) và $\rho(A_0 + A_1 + ... + A_m) < 1$, Hinrichsen và các cộng sự [7, Theorem 4.4] đã đưa ra bán kính ổn định phức $r_{\mathbb{C}}$ và bán kính ổn định thực $r_{\mathbb{R}}$ của Hệ (1.1) chịu nhiễu có cấu trúc $A_i \hookrightarrow A_i + D_i \Delta_i E_i$ ($i \in \underline{m_*}$), với $D_i = D_j$ hoặc $E_i = E_j$ ($\forall i, j \in \underline{m_*}$) là

$$r_{\mathbb{C}} = r_{\mathbb{R}} = \frac{1}{\max_{i \in \underline{m_*}} \|E_i (I - A_0 - A_1 - ... - A_m)^{-1} D_i\|}. \tag{1.2}$$

Đối với lớp hệ phụ thuộc thời gian, đặc biệt là hệ phi tuyến phụ thuộc thời gian, người ta không có định nghĩa về bán kính ổn định theo cách thông thường như trên. Bài toán ổn định vững được mở rộng thành bài toán tìm biên ổn định (xem Mục 2). Cho đến nay, đây vẫn còn là bài toán mở cần được khai thác sâu và hệ thống hơn. Trong bài viết này, bằng cách phát triển phương pháp tiếp cận được đưa ra gần đây bởi Ngoc và Hieu (2012) [5] cho lớp các phương trình sai phân thường, chúng tôi nghiên cứu đưa ra biên ổn định mới của một lớp hệ phương trình sai phân phi tuyến phụ thuộc thời gian có chậm

$$x(k+1) = f_0(k, x(k)) + \sum_{i=1}^{m} f_i(k, x(k - \tau_i(k))), \quad k \geq k_0, \tag{1.3}$$

chịu nhiễu phi tuyến. Chúng tôi đưa ra hai ví dụ minh họa cho kết quả đạt được. Trong trường hợp đặc biệt của các hệ tuyến tính dừng, dương (1.1) chịu nhiễu có cấu trúc

$A_i \hookrightarrow A_i + D_i\Delta_i E_i$ $(i \in \underline{m_*})$, biên ổn định mới này trở thành bán kính ổn định được xác định bởi (1.2).

2 Kết quả chính

Xét hệ phương trình sai phân phi tuyến có chậm (1.3), trong đó $f_i(\cdot,\cdot) : \mathbb{Z}_+ \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ $(i \in \underline{m_*})$ và $\tau_i(\cdot) : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+$ $(i \in \underline{m})$ là các hàm cho trước thỏa mãn $f_i(k,0) = 0$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall i \in \underline{m_*}$, và $0 \le \tau_i(k) \le \tau$, $\forall k \in \mathbb{Z}_+, \forall i \in \underline{m}$.

Gọi $\mathcal{T}$ là tập hợp tất cả các hàm $\varphi : \{-\tau, -\tau+1, ..., 0\} \to \mathbb{R}^n$. Với mỗi $\varphi \in \mathcal{T}$, ta đặt $\|\varphi\| := \max\big\{\|\varphi(j)\| : j \in \{-\tau, -\tau+1, ..., 0\}\big\}$. Với mỗi $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ cố định và mỗi $\varphi \in \mathcal{T}$, Hệ (1.3) có duy nhất nghiệm, kí hiệu bởi $x(\cdot, k_0, \varphi)$, thỏa điều kiện đầu

$$x(k_0 + j) = \varphi(j), \quad j \in \{-\tau, -\tau+1, ..., 0\}. \tag{2.1}$$

Định nghĩa 2.1. Nghiệm không của (1.3) được gọi là *ổn định mũ* (viết tắt là ES) nếu với $k_0 \in \mathbb{Z}_+$ cho trước, tồn tại $\eta(k_0) > 0, M > 0$ và $\beta \in (0;1)$ sao cho

$$\|\varphi\| < \eta(k_0) \quad \Rightarrow \quad \|x(k, k_0, \varphi)\| \le M\beta^{k-k_0}, \;\; \forall k \ge k_0.$$

Nghiệm không của (1.3) được gọi là *ổn định mũ toàn cục* (viết tắt là GES) nếu tồn tại $M > 0$ và $\beta \in (0;1)$ sao cho

$$\|x(k, k_0, \varphi)\| \le M\beta^{k-k_0}\|\varphi\|, \;\; \forall k \ge k_0.$$

Khi nghiệm không của (1.3) là ES (tương ứng GES) thì ta cũng nói (1.3) là ES (tương ứng GES).

Sau đây là một điều kiện đủ tường minh cho tính ổn định mũ của (1.3).

Mệnh đề 2.2. *Giả sử tồn tại các ma trận $A_i \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ $(i \in \underline{m_*})$ sao cho*

$$|f_i(k,x)| \le A_i|x|, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}^n, \; i \in \underline{m_*}. \tag{2.2}$$

Khi đó, nếu $\rho(\sum_{i=0}^m A_i) < 1$ thì (1.3) là GES.

Chứng minh. Mệnh đề 2.2 được suy ra từ [6, Theorem 2.3]. □

Nhận xét 2.3. Nếu có $j \in \underline{m_*}$ sao cho với mỗi $k \in \mathbb{Z}_+$, hàm $f_j(k,\cdot)$ khả vi liên tục trên $\mathbb{R}^n$ và tồn tại $A_j \in \mathbb{R}_+^{n\times n}$ sao cho

$$\big|J_{f_j}(k,x)\big| \le A_j, \quad \forall k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}^n, \tag{2.3}$$

thì (2.2) thỏa mãn với chỉ số j. Ở đây, $J_{f_j}(k,x)$ là ma trận Jacobi của hàm $f_j(k,\cdot)$ tại x, với $J_{f_i}(k,x) := (\frac{\partial f_{jr}}{\partial x_s}(k,x)) \in \mathbb{R}^{n\times n}, k \in \mathbb{Z}_+, x := (x_1, x_2, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^n$. Thật vậy, theo định lý giá trị trung bình, ta có

$$f_j\big(k,x\big) - f_j(k,0) = \bigg(\int_0^1 J_{f_j}\big(k,tx\big)dt\bigg)x.$$

Do vậy, từ (2.3) ta có

$$\begin{aligned}\big|f_j(k,x)\big| &\le \left|\left(\int_0^1 J_{fj}(k,tx)dt\right)x\right| \\ &\le \left(\int_0^1 |J_{f_j}(k,tx)|dt\right)|x| \le A_j|x|, \quad \forall k\in\mathbb{Z}_+, \forall x\in\mathbb{R}^n.\end{aligned}$$

Tiếp theo, chúng ta nghiên cứu về tính ổn định mũ của hệ phương trình sai phân có chậm chịu nhiễu. Giả sử các giả thiết của Định lý 2.2 thỏa mãn, khi đó (1.3) là GES. Xét một kiểu nhiễu phi tuyến có dạng sau

$$f_i(k,\cdot) \hookrightarrow f_i(k,\cdot) + g_i(k,\cdot), \quad \forall k\in\mathbb{Z}_+,\ i\in \underline{m_*},$$

trong đó, $f_i(\cdot,\cdot)$ $(i\in\underline{m_*})$ là các hàm được xác định trong (1.3), $g_i(\cdot,\cdot):\mathbb{Z}_+\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^n$ $(i\in\underline{m_*})$ là các hàm nhiễu chưa xác định, có thể thay đổi. Khi đó phương trình chịu nhiễu có dạng

$$x(k+1) = \sum_{i=0}^{m}\Big(f_i\big(k, x(k-\tau_i(k))\big) + g_i\big(k, x(k-\tau_i(k))\big)\Big), \tag{2.4}$$

trong đó $\tau_0(\cdot)=0$ và $\tau_i(\cdot):\mathbb{Z}_+\to\mathbb{Z}_+$ $(i\in\underline{m})$ là các hàm bị chặn.

Giả thiết rằng tồn tại các ma trận $D_{ij}\in\mathbb{R}_+^{n\times l_{ij}}, E_{ij}\in\mathbb{R}_+^{q_{ij}\times n}, \Delta_{ij}\in\mathbb{R}_+^{l_{ij}\times q_{ij}}$ $(i\in\underline{m_*}, j\in\underline{N_i})$ sao cho

$$\big|g_i(k,x)\big| \le \sum_{j=1}^{N_i} D_{ij}\Delta_{ij}E_{ij}|x|, \quad \forall k\in\mathbb{Z}_+, x\in\mathbb{R}^n, i\in\underline{m_*}, \tag{2.5}$$

trong đó, $N_i\in\mathbb{Z}_+$ $(i\in\underline{m_*})$ và $D_{ij}\in\mathbb{R}^{n\times l_{ij}}, E_{ij}\in\mathbb{R}^{q_{ij}\times n}$ $(i\in\underline{m_*}, j\in\underline{N_i})$ là các ma trận hằng xác định; $\Delta_{ij}\in\mathbb{R}^{l_{ij}\times q_{ij}}$ $(i\in\underline{m_*}, j\in\underline{N_i})$ là các ma trận thay đổi.

Bài toán tìm biên ổn định: *Tìm một số dương η sao cho hệ chịu nhiễu* (2.4) *duy trì tính GES một khi độ lớn của các nhiễu* (Δ_{ij}) $(i\in\underline{m_*}, j\in\underline{N_i})$ *bé hơn η. Số η được gọi là biên ổn định của* (2.4).

Định lý sau đây cho chúng ta một biên ổn định mới của hệ chịu nhiễu (2.4).

Định lý 2.4. *Giả sử* (2.2), (2.5) *được thỏa mãn và* $\rho(\sum_{i=0}^m A_i) < 1$. *Khi đó, hệ phương trình chịu nhiễu* (2.4) *vẫn duy trì tính GES nếu*

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_i}\|\Delta_{ij}\| < \frac{1}{\max\limits_{r,w\in\underline{m_*}, s\in\underline{N_r}, t\in\underline{N_w}}\left\|E_{rs}(I_n - \sum_{i=0}^m A_i)^{-1}D_{wt}\right\|}. \tag{2.6}$$

Chứng minh. Từ (2.2) và (2.5) ta có

$$\big|f_i(k,x)+g_i(k,x)\big| \le \left(A_i + \sum_{j=1}^{N_i} D_{ij}\Delta_{ij}E_{ij}\right)|x|, \ \forall k\in\mathbb{Z}_+, \forall x\in\mathbb{R}^n, i\in\underline{m_*}. \tag{2.7}$$

Đặt $B = \sum_{i=0}^{m} A_i$. Vì A_i, D_{ij}, E_{ij} $(i \in \underline{m_*}, j \in \underline{N_i})$ là các ma trận không âm nên $B + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} D_{ij}\Delta_{ij}E_{ij}$ cũng là ma trận không âm. Do đó, theo Định lý 2.2 để chứng minh (2.4) là GES ta chỉ cần chứng minh $\rho_0 := \rho\big(B + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} D_{ij}\Delta_{ij}E_{ij}\big) < 1$. Giả sử ngược lại rằng $\rho_0 \geq 1$, ta cần chỉ ra mâu thuẫn.

Thật vậy, theo Định lý 1.1 (i), tồn tại $x \in \mathbb{R}^n_+, x \neq 0$ sao cho

$$\left(B + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} D_{ij}\Delta_{ij}E_{ij}\right)x = \rho_0 x. \tag{2.8}$$

Từ (2.8), ta có

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} D_{ij}\Delta_{ij}E_{ij}x = (\rho_0 I_n - B)x. \tag{2.9}$$

Đặt $Q(t) = (tI_n - B), t \in \mathbb{R}$. Vì $\rho(B) < 1 \leq \rho_0$ nên $Q(\rho_0)^{-1}$ tồn tại và không âm, theo Định lý 1.1 (ii). Nhân hai vế của (2.9) từ bên trái với $Q(\rho_0)^{-1}$ ta có

$$Q(\rho_0)^{-1}\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} D_{ij}\Delta_{ij}E_{ij}x = x. \tag{2.10}$$

Gọi i_0j_0 là chỉ số sao cho $\|E_{i_0j_0}x\| = \max\limits_{i\in\underline{m_*}, j\in\underline{N_i}} \|E_{ij}x\|$. Từ (2.10), ta thấy $\|E_{i_0j_0}x\| > 0$. Nhân hai vế của (2.10) từ bên trái với $E_{i_0j_0}$ ta được

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} E_{i_0j_0}Q(\rho_0)^{-1}D_{ij}\Delta_{ij}E_{ij}x = E_{i_0j_0}x. \tag{2.11}$$

Lấy chuẩn hai vế của (2.11) ta có

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} \|E_{i_0j_0}Q(\rho_0)^{-1}D_{ij}\|\|\Delta_{ij}\|\|E_{ij}x\| \geq \|E_{i_0j_0}x\|.$$

Suy ra

$$\max_{r,w\in\underline{m_*}, s\in\underline{N_r}, t\in\underline{N_w}} \|E_{rs}Q(\rho_0)^{-1}D_{wt}\| \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} \|\Delta_{ij}\|\|E_{i_0j_0}x\| \geq \|E_{i_0j_0}x\|,$$

hay

$$\max_{r,w\in\underline{m_*}, s\in\underline{N_r}, t\in\underline{N_w}} \|E_{rs}Q(\rho_0)^{-1}D_{wt}\| \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} \|\Delta_{ij}\| \geq 1.$$

Từ đó ta có

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} \|\Delta_{ij}\| \geq \frac{1}{\max\limits_{r,w\in\underline{m_*}, s\in\underline{N_r}, t\in\underline{N_w}} \|E_{rs}Q(\rho_0)^{-1}D_{wt}\|}. \tag{2.12}$$

Mặt khác ta có

$$Q(1)^{-1} - Q(\rho_0)^{-1} = (\rho_0 - 1)Q(1)^{-1}Q(\rho_0)^{-1} \geq 0.$$

Do đó $Q(1)^{-1} \geq Q(\rho_0)^{-1}$. Vì vậy, $E_{rs}Q(1)^{-1}D_{wt} \geq E_{rs}Q(\rho_0)^{-1}D_{wt},\ \forall r, w \in \underline{m_*}, s \in \underline{N_r}, t \in \underline{N_w}$. Do tính đơn điệu của chuẩn của các ma trận không âm nên ta có

$$\max_{r,w\in\underline{m_*},s\in\underline{N_r},t\in\underline{N_w}} \|E_{rs}Q(1)^{-1}D_{wt}\| \geq \max_{r,w\in\underline{m_*},s\in\underline{N_r},t\in\underline{N_w}} \|E_{rs}Q(\rho_0)^{-1}D_{wt}\|,$$

hay

$$\frac{1}{\max\limits_{r,w\in\underline{m_*},s\in\underline{N_r},t\in\underline{N_w}} \|E_{rs}Q(\rho_0)^{-1}D_{wt}\|} \geq \frac{1}{\max\limits_{r,w\in\underline{m_*},s\in\underline{N_r},t\in\underline{N_w}} \|E_{rs}Q(1)^{-1}D_{wt}\|}. \tag{2.13}$$

Từ (2.12), (2.13) ta có

$$\sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} \|\Delta_{ij}\| \geq \frac{1}{\max\limits_{r,w\in\underline{m_*},s\in\underline{N_r},t\in\underline{N_w}} \|E_{rs}Q(1)^{-1}D_{wt}\|}.$$

Điều này mâu thuẫn với (2.6). Do đó $\rho\big(B + \sum_{i=0}^{m}\sum_{j=1}^{N_i} D_{ij}\triangle_{ij}E_{ij}\big) < 1$, vì vậy (2.4) là GES. Định lý được chứng minh. □

Mở rộng điều kiện (2.5) của các hàm nhiễu $g_i(\cdot,\cdot)$ $(i \in \underline{m_*})$ bằng cách thay đổi một số số hữu hạn N_i thành vô hạn. Gọi $I \subseteq \underline{m_*}$ là tập tất cả các chỉ số s khi thay N_s bởi $+\infty$. Khi đó, (2.5) trở thành:

$$\begin{cases} \big|g_s(k,x)\big| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} D_{sj}\Delta_{sj}E_{sj}|x|, & \forall k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}^n, s \in I,\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{+\infty} \|\Delta_{sj}\| < +\infty, & s \in I,\\ \big|g_i(k,x)\big| \leq \displaystyle\sum_{j=1}^{N_i} D_{ij}\Delta_{ij}E_{ij}|x|, & \forall k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}^n, i \in \underline{m_*}\setminus I, \end{cases} \tag{2.14}$$

trong đó, $D_{ij} \in \mathbb{R}^{n\times l_{ij}}, E_{ij} \in \mathbb{R}^{q_{ij}\times n}$ $(i \in \underline{m_*})$ là các ma trận hằng xác định; $\Delta_{ij} \in \mathbb{R}^{l_{ij}\times q_{ij}}$ $(i \in \underline{m_*})$ là các ma trận thay đổi.

Với điều kiện mở rộng (2.14), định lý sau đây cho chúng ta một biên ổn định của hệ phương trình chịu nhiễu (2.4).

Định lý 2.5. *Giả sử (2.2), (2.14) được thỏa mãn và $\rho(\sum_{i=0}^{m} A_i) < 1$. Khi đó, hệ phương trình chịu nhiễu (2.4) vẫn duy trì tính GES nếu*

$$\sum_{s\in I}\sum_{j=1}^{+\infty}\|\Delta_{sj}\| + \sum_{i\in\underline{m_*}\setminus I}\ \sum_{j=1}^{N_i}\|\Delta_{ij}\| < \frac{1}{\sup\limits_{r,w\in\underline{m_*},s\in U_r,t\in U_w} \left\|E_{rs}(I_n - \sum_{i=0}^{m} A_i)^{-1}D_{wt}\right\|}, \tag{2.15}$$

trong đó, $U_i := \mathbb{Z}_+$ nếu $i \in I$ và $U_i := \underline{N_i}$ nếu $i \in \underline{m_*}\setminus I$ với mọi $i \in \underline{m_*}$.

Nhận xét 2.6. Trong trường hợp đặc biệt khi $f_i(k,x) \equiv A_i x \in \mathbb{R}^n_+$ $(i \in \underline{m_*})$ và $g_i(k,x) \equiv D_i \Delta_i E_i x$ $(i \in \underline{m_*})$, với mọi $k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}^n$, biên ổn định được xác định bởi vế phải của (2.6) và (2.15) trở thành bán kính ổn định của hệ tuyến tính dừng, dương (1.1) chịu nhiễu có cấu trúc $A_i \hookrightarrow A_i + D_i \Delta_i E_i$ $(i \in \underline{m_*})$, được xác định bởi (1.2).

3 Ví dụ áp dụng

Chúng tôi trình bày hai ví dụ áp dụng cho một số kết quả đạt được trong Mục 2.

Ví dụ 3.1. Xét phương trình sai phân vô hướng

$$\begin{aligned} x(k+1) = \frac{2}{3} e^{-k^2 x^2(k)} \sin x(k) + 2a \arctan(x(k)) + \\ \ln\Big(1 + \frac{k}{\sqrt{11}(k+1)} |x(k-\tau(k))|\Big) + 3bx(k-\tau(k)), \quad k \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \tag{3.1}$$

trong đó a, b là các tham số thực.

Đặt

$$\begin{aligned} &f_1(k,x) := \frac{2}{3} e^{-k^2 x^2(k)} \sin x; \; f_2(k,y) := \ln\Big(1 + \frac{k}{\sqrt{11}(k+1)} |y|\Big), \\ &g_1(k,x) := 2a \arctan x; \; g_2(k,y) := 3by, \quad (k \in \mathbb{Z}_+, x, y \in \mathbb{R}). \end{aligned}$$

Khi đó ta có

$$\begin{aligned} &|f_1(k,x)| \le \frac{2}{3}|x| \;\; |f_2(k,y)| \le \frac{1}{\sqrt{11}}|y|, \\ &|g_1(k,x)| \le 2|a||x|; \; |g_2(k,y)| = 3|b||y|, \end{aligned}$$

với mọi $k \in \mathbb{Z}_+, x, y \in \mathbb{R}$. Ngoài ra, $\frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{11}} < 1$. Do đó, theo Định lý 2.4, phương trình sai phân (3.1) là GES nếu

$$|a| + |b| < \frac{1}{3(1 - \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{11}})^{-1}}. \tag{3.2}$$

Ví dụ 3.2. Xét hệ phương trình sai phân có chậm trong không gian $\mathbb{R}^2$

$$x(k+1) = f_0(k, x(k)) + \sum_{i=1}^{2} f_i\big(k, x(k-\tau_i(k))\big), \; k \in \mathbb{Z}_+, \tag{3.3}$$

trong đó, $\tau_i(\cdot) : \mathbb{Z}_+ \to \mathbb{Z}_+, i = 1, 2,$ là các hàm bị chặn và

$$f_0(k,x) := \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{1}{64}x_1^2 + \frac{1}{16}x_2^2} \\ \frac{k}{3k+1} x_2 \end{pmatrix};$$

$$f_1(k,x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{8} \sin x_1 \\ \frac{e^{-k}}{2} x_1 + \frac{1}{6} x_2 \end{pmatrix}; \;\; f_2(k,x) := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} x_1 \\ \frac{1}{6} x_2 \end{pmatrix},$$

trong đó, $k \in \mathbb{Z}_+, x := (x_1,\ x_2)^T \in \mathbb{R}^2$.
Ta thấy rằng,

$$|f_0(k,x)| \le A_0|x|,\ \ |f_1(k,x)| \le A_1|x|,\ \ |f_2(k,x)| \le A_2|x|,$$

với mọi $k \in \mathbb{Z}_+, x \in \mathbb{R}^2$, trong đó

$$A_0 := \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{pmatrix},\ A_1 := \begin{pmatrix} \frac{1}{8} & 0 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{6} \end{pmatrix},\ A_2 := \begin{pmatrix} \frac{1}{4} & 0 \\ 0 & \frac{1}{6} \end{pmatrix}.$$

Vì $\rho(A_0 + A_1 + A_2) = \rho\left[\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{2} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}\right] = \dfrac{7+\sqrt{19}}{12} < 1$, nên (3.3) là GES, bởi Định lý 2.2.

Tiếp theo, xét hệ phương trình sai phân chịu nhiễu có dạng sau

$$\begin{aligned} x(k+1) = &\Big[f_0(k,x(k)) + g_0(k,x(k))\Big] + \\ &\sum_{i=1}^{2}\Big[f_i\big(k,x(k-\tau_i(k)) + g_i\big(k,x(k-\tau_i(k))\big)\Big],\quad k \in \mathbb{Z}_+, \end{aligned} \tag{3.4}$$

trong đó,

$$g_0(k,x) := \begin{pmatrix} \sqrt{a^2x_1^2 + b^2x_2^2} \\ e^{-k^2}ax_1 + 2bx_2 \end{pmatrix};\quad g_1(k,x) := \begin{pmatrix} 3dx_1 + cx_2 3^{-kx_1^2} \\ 0 \end{pmatrix};$$

$$g_2(k,x) := \begin{pmatrix} (f + \frac{kg}{k+2})x_1 + (e + 2f + g + h)x_2 \\ 2fx_1 + 2(e+2f)x_2 \end{pmatrix},$$

trong đó a, b, c, d, e, f, g, h là các tham số thực.

Ta thấy

$$\begin{aligned} &|g_0(k,x)| \le D_0\Delta_0E_0|x|;\ |g_1(k,x)| \le D_1\Delta_1E_1|x|, \\ &|g_2(k,x)| \le \big(D_{21}\Delta_{21}E_{21} + D_{22}\Delta_{22}E_{22}\big)|x|, \end{aligned}$$

với mọi $k \in \mathbb{Z}_+, x := (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, trong đó

$$\begin{aligned} D_0 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix};\ \Delta_0 := \begin{pmatrix} |a| & |b| \end{pmatrix};\ E_0 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}; \\ D_1 &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \Delta_1 := \begin{pmatrix} |c| & |d| \end{pmatrix};\ E_1 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}; \\ D_{21} &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix};\ \Delta_{21} := \begin{pmatrix} |e| & |f| \end{pmatrix};\ E_{21} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}; \\ D_{22} &:= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix};\ \Delta_{22} := \begin{pmatrix} |g| & |h| \end{pmatrix};\ E_{22} := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Áp dụng Định lý 2.4 ta có (3.4) là GES nếu

$$\|\Delta_0\| + \|\Delta_1\| + \|\Delta_{21}\| + \|\Delta_{22}\| < \frac{1}{\max\limits_{E \in \mathcal{E}, D \in \mathcal{D}} \big\|E(I_2 - A_0 - A_1 - A_2)^{-1}D\big\|}, \tag{3.5}$$

trong đó $\mathcal{E} := \{E_0, E_1, E_{21}, E_{22}\}, \mathcal{D} := \{D_0, D_1, D_{21}, D_{22}\}$.

Để có kết quả cụ thể hơn của (3.5), chúng ta cần tính toán cụ thể giá trị các ma trận $E(I_2 - A_0 - A_1 - A_2)^{-1}D$, với $E \in \mathcal{E}, D \in \mathcal{D}$. Phần tính toán chi tiết sẽ không trình bày ở đây. Giả sử $\mathbb{R}^2$ được trang bị bởi chuẩn 2. Từ các kết quả tính toán thu được, ta có

$$\max_{E\in\mathcal{E}, D\in\mathcal{D}} \left\| E(I_2 - A_0 - A_1 - A_2)^{-1}D \right\|_2 = \left\| \begin{pmatrix} 36 \\ 92 \end{pmatrix} \right\|_2 = \sqrt{9760}.$$

Khi đó, từ (3.5) ta có (3.4) là GES nếu

$$\sqrt{a^2 + b^2} + \sqrt{c^2 + d^2} + \sqrt{e^2 + f^2} + \sqrt{g^2 + h^2} < \frac{1}{\sqrt{9760}}.$$

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. S. Aberkane, D. Vasile (2015), Robust Stability and Robust Stabilization of a Class of Discrete-Time Time-Varying Linear Stochastic Systems, *SIAM Journal on Control and Optimization*, **53** (1), 30-57.

2. R.P. Agarwal (2000), *Difference equations and inequalities, theory, methods, and applications*, Second Edition, Marcel Dekker, Newyork.

3. S. Elaydi (2005), *An Introduction to Difference Equations*, Springer Verlag.

4. A. Liapunov (1984), On the stability of ellipsoidal figures of equilibrium of a rotating fluid (in Russian). Published in *Bulletin Astronomique*, 1885.

5. P.H.A. Ngoc, L.T. Hieu (2012), On stability of discrete-time systems under nonlinear time-varying perturbations,*Advances in Difference Equations,* **120**, 1-10.

6. P.H.A. Ngoc, L.T. Hieu (2013), New criteria for exponential stability of nonlinear difference systems with time-varying delay, *International Journal of Control,*, **86** (9), 1646-1651.

7. D. Hinrichsen, N.K. Son, P.H.A. Ngoc (2003), Stability radii of higher order positive difference systems, *Systems & control letters*, **49** (5), 377-388.

8. D. Hinrichsen, A.J. Pritchard (2005), *Mathematical systems theory I: modelling, state space analysis, stability and robustness*, Springer.

9. D. Hinrichsen, N.K. Son (1998), Stability radii of positive discrete-time systems under affine parameter perturbations, *International J. Robust and Nonlinear Control* **8**, 1169-1188.