PHÂN LOẠI CỦA CÁC ĐẠI SỐ LIE THỰC GIẢI ĐƯỢC CÓ IDEAL DẪN XUẤT 1-CHIỀU HOẶC ĐỐI CHIỀU BẰNG 1

PGS.TS. Lê Anh Vũ, ThS. Huỳnh Văn Hiếu
Khoa Toán-Kinh tế, Trường Đại học Kinh tế Luật Tp Hồ Chí Minh

ThS. Lê Anh Tuấn
Trường Đại học Thể dục Thể thao Tp Hồ Chí Minh

ThS. Cao Trần Tứ Hải
Trường THPT chuyên Lê Quý Đôn, Ninh Thuận

ThS. Nguyễn Thị Mộng Tuyền
Khoa Sư phạm Toán -Tin, Trường Đại học Đồng Tháp
Email: ntmtuyen@dthu.edu.vn

Tóm tắt. *Cho một đại số Lie Heisenberg tùy ý thì ideal dẫn xuất của nó là* 1*-chiều và đại số Lie kim cương thực* 4*-chiều thì ideal dẫn xuất có đối chiều là* 1*. Tuy nhiên, tất cả các quỹ đạo đối phụ hợp của mỗi nhóm Lie Heisenberg cũng như đại số Lie kim cương thực* 4*-chiều đều là các quỹ đạo* 0 *chiều hoặc chiều cực đại. Dựa theo tính chất này, chúng tôi đưa ra một phân loại đầy đủ các MD-đại số có ideal dẫn xuất* 1*-chiều hoặc đối chiều bằng* 1*.*

1 Mở đầu

Một nhóm Lie thực giải được hữu hạn chiều được gọi là MD-nhóm nếu các quỹ đạo đối phụ hợp của nó 0-chiều hoặc chiều cực đại. Đại số Lie của MD-nhóm được gọi là MD-đại số và lớp tất cả các MD-đại số được gọi là MD-lớp. Mặt dù sự phân loại tổng quát các đại số Lie giải được có số chiều nhỏ đã được biết, cụ thể:

- Năm 1995, D. Arnal, M. Cahen và J. Ludwig đã liệt kê tất cả các đại số Lie giải được sao cho các quỹ đạo đối phụ hợp của nhóm Lie liên thông tương ứng với chúng là 0-chiều hoặc 2-chiều. Nhưng họ không phân loại chúng đến đẳng cấu (xem [1]).
- Năm 1999, L. Yu, Galistki and D. A. Tinasshev đã phân loại đầy đủ tất cả các đại số Lie metan Aben 9-chiều (xem [2]).
- Năm 2007, R. Campoamor-Stursberg đưa ra phân loại đầy đủ các đại số Lie 9-chiều với phân tích Levi không tầm thường (xem [3]).
- Năm 2007, I. Kath đã phân loại lớp các đại số Lie toàn phương lũy linh không quá 10-chiều (xem [4]).
- Năm 2012, M. T. Dương, G. Pinczon, và R. Ushirobia đưa ra phân loại các đại số Lie toàn phương kì dị (xem [5]).

Nhưng bài toán phân loại đầy đủ các đại số Lie (thực hoặc phức) giải được vẫn còn là bài toán mở. Để tham gia vào bài toán phân loại các đại số Lie giải được, chúng tôi đã nghiên cứu một lớp con đặc biệt của các đại số Lie thực giải được có ideal dẫn xuất 1-chiều hoặc đối chiều bằng 1. Trong bài báo cáo này, theo tính chất của đại số Lie Heisenberg và đại số Lie kim cương thực, chúng tôi đưa ra một phân loại đầy đủ các MD-đại số có ideal dẫn xuất 1-chiều hoặc đối chiều bằng 1.

2 Nội dung nghiên cứu

2.1 Phân loại đầy đủ của MD(*,1)-lớp

Định lí 2.1. *$MD(*, 1)$ lớp trùng với lớp tất cả các đại số Lie thực giải được mà ideal dẫn xuất thứ nhất của chúng là 1-chiều, tuy nhiên $MD(*, 1)$ chỉ bao gồm đại số Lie của nhóm các phép biến đổi aphin trên đường thẳng thực, các đại số Lie Heisenberg thực và mở rộng trực tiếp của chúng bởi đại số Lie giao hoán thực. Nói cách khác, Cho $\mathcal{G}$ là một đại số Lie thực giải được n-chiều ($n \geq 3$) với ideal dẫn xuất $\mathcal{G}^1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ 1-chiều ($2 \leq n \in \mathbb{N}$). Thì $\mathcal{G}$ là một $MD(n, 1)$-đại số, và đẳng cấu với một và chỉ một trong các đại số Lie sau:*

1. *Đại số Lie $aff(\mathbb{R})$ của nhóm $Aff(\mathbb{R})$ của tất cả các phép biến đổi aphin trên $\mathbb{R}$.*
2. *$\mathbb{R}^{n-2} \oplus aff\mathbb{R}, 3 \leq n$.*
3. *Đại số Lie Heisenberg $\mathfrak{h}_{2m+1}$; $3 \leq 2m + 1 = n$.*
4. *$\mathfrak{h}_{2m+1} \oplus \mathbb{R}^{n-2m-1}$; $3 \leq 2m + 1 < n$.*

Rõ ràng, từ định lí 2.1 chúng tôi có thể đưa ra một đặc trưng mới của đại số Lie Heisenberg, và được phát biểu trong hệ quả sau.

Hệ quả 2.2. *Nếu $\mathcal{G}$ là một đại số Lie thực n-chiều ($n \geq 3$). Thì các điều kiện sau là tương đương.*

1. *$\mathcal{G}$ bất khả phân và có ideal dẫn xuất thứ nhất $\mathcal{G}^1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}] \equiv \mathbb{R}$.*
2. *$\mathcal{G}$ là $MD(n, 1)$-đại số bất khả phân.*
3. *$\mathcal{G}$ là đại số Lie Heisenberg n-chiều (n lẻ).*

Trong phần này, chúng tôi luôn cho $\mathcal{G}$ là đại số Lie thực giải được n chiều ($n \geq 3$) với ideal dẫn xuất $\mathcal{G}^1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ 1-chiều. Không mất tính tổng quát, chúng tôi chọn một cơ sở sao cho $\mathcal{G} = \langle X_1, X_2, ..., X_n \rangle, \mathcal{G}^1 = \langle X_n \rangle$.
Kí hiệu $[X_i, X_n] = a_i X_n; [X_i, X_j] = a_{ij} X_n$ (a_i, a_{ij} là các số thực); $i, j = 1, 2, ..., n-1$.
Có hai trường hợp để xét cho các giá trị của a_i:

- Trường hợp 1. Tồn tại $i \in \{1, 2, ..., n-1\} : [X_i, X_n] = a_i X_n \neq 0$, tức là, $a_i \neq 0$.
- Trường hợp 2. $[X_i, X_n] = a_i X_n = 0, \forall i = 1, 2, ..., n-1$.

Để chứng minh định lí này chứng ta cần một số bổ đề sau:

Bổ đề 2.3. *Nếu tồn tại $i \in \{1, 2, ..., n-1\} : [X_i, X_n] = a_i X_n \neq 0$, tức là, $a_i \neq 0$ thì $\mathcal{G}$ là $MD(n, 1)$-đại số đẳng cấu với $\mathbb{R}^{n-2} \oplus Lie(Aff\mathbb{R})$, trong đó $Lie(Aff\mathbb{R})$ là đại số Lie của nhóm $Aff\mathbb{R}$ trên $\mathbb{R}$ ($Lie(Aff\mathbb{R})$ là đại số Lie không giao hoán 2-chiều).*

Chứng minh. Giả sử $[X_{n-1}, X_n] = a_{n-1} X_n; a_{n-1} \neq 0$.
Đặt $Y_i = X_i - \dfrac{a_i}{a_{n-1}} X_{n-1}, i = 1, 2, ..., n-2; Y_{n-1} = \dfrac{1}{a_{n-1}} X_{n-1}$ và $Y_n = X_n$; Khi đó

$[Y_i, Y_n] = 0, \forall i = 1, 2, ..., n-2$ và $[Y_{n-1}, Y_n] = Y_n$. Do đó, không mất tính tổng quát ta có thể giả sử $[X_i, X_n] = 0, \forall i = 1, 2, ..., n-2$ và $[X_{n-1}, X_n] = X_n$. Ta có

$$\begin{aligned}
&[[X_i, X_j], X_{n-1}] + [[X_{n-1}, X_i], X_j] + [[X_j, X_{n-1}], X_i] = 0 \\
\Rightarrow & a_{ij}[X_n, X_{n-1}] = 0 \\
\Rightarrow & a_{ij}X_n = 0 \\
\Rightarrow & [X_i, X_j] = a_{ij}X_n = 0, \ \forall i, j = 1, 2, .., n-2.
\end{aligned}$$

Kí hiệu $[X_i, X_{n-1}] = b_i X_n; i = 1, 2, ..., n-2$. Bằng cách thay đổi cơ sở như trên, ta có $Y_i = X_i + b_i X_n, i = 1, 2, ..., n-2; Y_{n-1} = X_{n-1}$ và $Y_n = X_n$. Khi đó, $[Y_i, Y_{n-1}] = 0; i = 1, 2, ..., n-2$. Vì thế, ta có thể giả sử $[X_i, X_{n-1}] = 0; i = 1, 2, ..., n-2$
Do đó, $\mathcal{G}$ đẳng cấu với đại số Lie sau:

$$\langle X_1, X_2, ..., X_n \rangle, [X_{n-1}, X_n] = X_n.$$

(các móc Lie khác tầm thường).
Dễ thấy $\mathcal{G}$ khả phân: $\mathcal{G} \cong \mathbb{R}^{n-2} \oplus Lie(Aff\mathbb{R})$ và K-quỹ đạo của $\mathcal{G}$ hoặc là 0 chiều hoặc là 2 chiều. Vậy, $\mathcal{G}$ là $MD(n, 1)$-đại số. □

Ngược lại, nếu $[X_i, X_n] = 0, \forall i = 1, 2, ..., n-1$ thì đại số Lie $\mathcal{G}$ được xác định duy nhất bởi ma trận vuông thực phản xứng $A = (a_{ij})_{n-1}, i, j = 1, 2, ..., n-1$, A được gọi là ma trận cấu trúc của $\mathcal{G}$. Vì $\mathcal{G}^1 = \langle X_n \rangle$, nên A không tầm thường và $rankA$ chẳn.

Bổ đề 2.4. *Nếu $[X_i, X_n] = a_i X_n = 0, \forall i = 1, 2, ..., n-1$ và A là một ma trận cấu trúc của $\mathcal{G}$ thì $\mathcal{G}$ là một $MD(n, 1)$-đại số và số chiều cực đại của các K-quỹ đạo là hạng của ma trận A.*

Chứng minh. Giả sử $\mathcal{G}^* \equiv \mathbb{R}^n$ là không gian đối ngẫu của $\mathcal{G}$ với cơ sở đối ngẫu $\{X_1^*, X_2^*, ..., X_n^*\}$ và $F = a_1 X_1^* + a_2 X_2^* + ... + a_n X_n^* \equiv (a_1, a_2, ..., a_n)$ là phần tử tùy ý của $\mathcal{G}^*$. Ma trận Kirilov của F là:

$$K_F = (\langle F, [X_i, X_j] \rangle)_n = a_n \begin{bmatrix} a_{11} & . & . & . & a_{1,n-1} & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ a_{n-1,1} & . & . & . & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & 0 \end{bmatrix} = a_n \begin{bmatrix} A & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Rank$(K_F) \in \{0, 2k\}$, với $2k =$rank$A$. Đặc biệt

- rank$(K_F) = 0$ khi và chỉ khi $a_n = 0$ (hay $F = (a_1, a_2, ..., a_{n-1}, 0)$.
- rank$(K_F) =$rank$(A) = 2k > 0$ khi và chỉ khi $a_n \neq 0$.

Do đó, $\mathcal{G}$ là $MD(n, 1)$-đại số và số chiều cực đại của các K-quỹ đạo là hạng của ma trận A. □

Bây giờ, chúng tôi xét $\mathcal{G}$ khả phân trong trường 2:

Bổ đề 2.5. *Giả sử $[X_i, X_n] = a_i X_n = 0, \forall i = 1, 2, ..., n-1$ thì $\mathcal{G}$ khả phân nếu và chỉ nếu $dim(Z(\mathcal{G})) > 1$.*

Chứng minh. Vì $[X_i, X_n] = a_i X_n = 0, \forall i = 1, 2, ..., n-1$ nên $X_n \in Z(\mathcal{G})$ và $dim Z(\mathcal{G}) > 0$.
Giả sử $\mathcal{G} = \mathcal{A} \oplus \mathcal{B}$ với $\mathcal{A}, \mathcal{B}$ là một đại số Lie con không tầm thường của $\mathcal{G}$. Đặt $X_n = X_a + X_b$ với $X_a \in \mathcal{A}, X_b \in \mathcal{B}$. Lấy $Y \in \mathcal{G}, Y = Y_a + Y_b$ với $Y_a \in \mathcal{A}, Y_b \in \mathcal{B}$. Khi đó, $0 = [X_n, Y] = [X_a, Y_a] + [X_a, Y_b] + [X_b, Y_a] + [X_b, Y_b] = [X_a, Y_a] + [X_b, Y_b]$ (vì $[X_a, Y_b] = [X_b, Y_a] = 0$) suy ra, $[X_a, Y_a] = [X_b, Y_b] = 0$. Do đó, $X_a, X_b \in Z(\mathcal{G})$.

- Nếu $X_a \neq 0 \neq X_b$ thì X_a, X_b độc lập và $\dim Z(\mathcal{G}) > 1$.
- Nếu X_a hoặc X_b bằng 0. Không mất tính tổng quát, giả sử $X_a = 0$, thì $X_n = X_b \in \mathcal{B}$. Lấy $X \in \mathcal{A}, X \neq 0$, ta có $[X, Z] = 0, \forall Z \in \mathcal{B}$. Nói cách khác ta có,

$$[X, T] \in \mathcal{A} \cap \mathcal{G}^1 = \mathcal{G} \cap \langle X_n \rangle \subseteq \mathcal{A} \cap \mathcal{B} = 0 \Rightarrow [X, T] = 0, \forall T \in \mathcal{A}.$$

  Suy ra $X \in Z(\mathcal{G})$. Vì X, X_n độc lập nên $\dim Z(\mathcal{G}) > 1$.

Ngược lại, giả sử $\dim Z(\mathcal{G}) > 1$, thì tồn tại $X \in Z(\mathcal{G})$ sao cho X, X_n độc lập. Chúng ta có thể bổ sung thêm các phần tử $T_1, T_2, ..., T_{n-2}$ để được một cơ sở của $\mathcal{G}$. Dễ thấy, $\mathcal{G} = \langle X \rangle \oplus \langle X_n, T_1, T_2, ..., T_{n-1} \rangle$. Suy ra, $\mathcal{G}$ khả phân. □

Chú ý. Tâm của đại số Lie Heisenberg là 1-chiều, $Z(\mathfrak{h}_{2n+1}) = \langle Z \rangle$. Do đó, $\mathfrak{h}_{2n+1}$ là bất khả phân. Tâm của đại số Lie $\mathcal{G}$ trong trường hợp 1 là $Z(\mathcal{G}) = \langle X_1, X_2, ..., X_{n-2} \rangle$. Do đó, $\mathcal{G}$ là khả phân nếu $(n > 3)$.
Mỗi MD-đại số $\mathcal{G}$ trong trường hợp 2 được xác định duy nhất bởi ma trận cấu trúc A phản xứng bậc $n-1$. Chúng ta xét A, B đẳng cấu đại số Lie xem đúng hay không.

Bổ đề 2.6. *Cho $A = (a_{ij})_{n-1}, B = (b_{ij})_{n-1}$ là các ma trận vuông phản xứng bậc $n-1$ và $\mathcal{G}_A, \mathcal{G}_B$ là $MD(n,1)$-đại số được xác định bởi các ma trận A, B tương ứng. Thì*

$$(\mathcal{G}_A \cong \mathcal{G}_B) \Leftrightarrow (\exists c \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \exists C \in GL(n-1, \mathbb{R}) \text{ sao cho } cA = C^t BC).$$

Chứng minh. Giả sử $f : \mathcal{G}_A \longrightarrow \mathcal{G}_B$ là một đẳng cấu. Vì $f(\mathcal{G}_A^1) = \mathcal{G}_B^1$, có số thực $c \neq 0$ sao cho $f(X_n) = cX_n$. Ma trận M của f trong cơ sở $(X_1, X_2, ..., X_n)$ là

$$M = \begin{bmatrix} c_{11} & . & . & . & c_{1,n-1} & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{n-1,1} & . & . & . & c_{n-1,n-1} & 0 \\ c_{n1} & . & . & . & c_{n,n-1} & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ * & c \end{bmatrix}$$

với $C = (c_{ij})_{n-1}$ là ma trận vuông bậc $n-1$, và $*$ là véctơ $(c_{n1}, c_{n2}, ..., c_{n,n-1})$. Bởi vì, f là đẳng cấu, M là khả nghịch và C cũng vậy. Do đó, ánh xạ tuyến tính f là đẳng cấu Lie nếu và chỉ nếu

$$
\begin{aligned}
&f([X_i, X_j]_A) = [f(X_i), f(X_j)]_B \quad \forall i, j \\
\Leftrightarrow &f(a_{ij}X_n) = [\sum_{k=1}^{n-1} c_{kj}X_k + c_{ni}X_n, \sum_{l=1}^{n-1} c_{lj}X_l + c_{nj}X_n]_B \quad \forall i, j \\
\Leftrightarrow &ca_{ij}X_n = \sum_{k=1}^{n-1} c_{kj}. \sum_{l=1}^{n-1} c_{lj}[X_k, X_l]_B \quad \forall i, j \\
\Leftrightarrow &ca_{ij}X_n = (\sum_{k,l=1}^{n-1} c_{ki}.b_{kl}.c_{lj})X_n \quad \forall i, j \\
\Leftrightarrow &ca_{ij} = \sum_{k,l=1}^{n-1} c_{ki}.b_{kl}.c_{lj} \quad \forall i, j \\
\Leftrightarrow &cA = C^tBC
\end{aligned}
$$

Ngược lại, Nếu tồn tại số thực $c \neq 0$ và ma trận C khả nghịch $C = (c_{ij})_{n-1}$ sao cho $cA = C^tBC$. Giả sử $f : \mathcal{G}_A \longrightarrow \mathcal{G}_B$ là ánh xạ tuyến tính, được xác định trong cơ sở $(X_1, X_2, ..., X_n)$ bởi ma trận

$$
M' = \begin{bmatrix} c_{11} & . & . & . & c_{1,n-1} & 0 \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . \\ c_{n-1,1} & . & . & . & c_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & . & . & . & 0 & c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C & 0 \\ 0 & c \end{bmatrix}.
$$

Vì C khả nghịch và $c \neq 0$, nên f là đẳng cấu tuyến tính. Hơn nữa, dễ dàng kiểm tra được f là đồng cấu Lie. Do đó, f là đẳng cấu Lie. □

Chú ý. Một ma trận vuông thực phản xứng khác không có thể được chuyển đến dạng mẫu. Đặc biệt, nếu A là một ma trận như trên thì tồn tại ma trận trực giao thực C sao cho

$$C^tAC = diag(\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_m, 0, ..., 0)$$

Với $\Lambda_j := \begin{bmatrix} 0 & \lambda_j \\ -\lambda_j & 0 \end{bmatrix}$; khi đó $\pm i\lambda_1, ..., \pm i\lambda_m$ tập tất cả các giá trị riêng bội của A.

Ví dụ Cho đại số Heisenberg

$$\mathfrak{h}_{2m+1} := \langle X_i, Y_i, Z : i = 1, 2, ..., m \rangle ; [X_i, Y_i] = Z, i = 1, 2, ..., m$$

có ma trận cấu trúc $H = diag(I, I, ..., I)$ gồm n khối $I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$. Ma trận H chỉ có 2 vectơ riêng là $\pm i$ bội m, H không có giá trị riêng là 0.

2.2 Điều kiện cần và đủ để các MD(*,*-1)-đại số xác định

Định lí 2.7. *Cho $\mathcal{G}$ là một đại số Lie thực giải được n-chiều $(n \geq 3)$ với ideal dẫn xuất $\mathcal{G}^1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$ có đối chiều bằng 1.*

1. *Nếu $\mathcal{G}^1$ giao hoán thì $\mathcal{G}$ là $MD(n, n-1)$-đại số bất khả phân.*

2. *Nếu $n > 4$ và $\mathcal{G}$ là $MD(n, n-1)$-đại số thì ideal dẫn xuất $\mathcal{G}^1$ là giao hoán.*

Chú ý 2.8. *Khi $n \leq 4$, khẳng định 2 là không đúng. Cụ thể, nếu $n < 4$, tất cả các đại số Lie n-chiều là MD-đại số, chúng được liệt kê dễ dàng. Nếu $n = 4$ thì ideal dẫn xuất của đại số Lie kim cương thực 4-chiều là đại số Lie Heisenberg 3-chiều không giao hoán và có đối chiều bằng 1.*

Để chứng minh định lí, chúng tôi cần một số bổ đề.

Bổ đề 2.9. *Nếu $\mathcal{G}$ là một MD-đại số n-chiều ($n \geq 3$) với ideal dẫn xuất $\mathcal{G}^1 \cong \mathbb{R}^{n-1}$ thì $dim\Omega_F \in \{0, 2\}, \forall F \in \mathcal{G}^*$.*

Chứng minh. Không mất tính tổng quát, giả sử $\mathcal{G}^2 \subset \langle X_3, X_4, ..., X_n \rangle$, $\mathcal{G}^1 = \langle X_2, X_3, X_4, ..., X_n \rangle$, $\mathcal{G} = \langle X_1, X_2, X_3, X_4, ..., X_n \rangle$ và $ad_{X_1} = (a_{ij})_{n-1} \in End(\mathcal{G}^1)$.
Với $F = X_2^* \in \mathcal{G}^*$, ma trận của dạng song tuyến tính B_F là

$$B_F = \begin{bmatrix} 0 & -a_{12} & -a_{13} & ... & -a_{1n} \\ a_{12} & 0 & 0 & ... & 0 \\ a_{13} & 0 & 0 & ... & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ a_{1n} & 0 & 0 & ... & 0 \end{bmatrix}$$

Dễ thấy $rankB_F \in \{0, 2\}$. Vì $\mathcal{G}$ là MD-đại số, nên $dim\Omega_F = rankB_F \in \{0, 2\}, \forall F \in \mathcal{G}^*$. □

Bổ đề 2.10. *Nếu $\mathcal{G}$ là một đại số Lie thực giải được n-chiều ($n \geq 3$) với ideal dẫn xuất $\mathcal{G}^1 \cong \mathbb{R}^{n-1}$. Không mất tính tổng quát, chúng ta giả sử rằng $\mathcal{G}^2 = \langle X_{k+1}, ..., X_n \rangle$, $\mathcal{G}^1 = \langle X_2, ..., X_n \rangle$ và $\mathcal{G} = \langle X_1, X_2, ..., X_n \rangle$. Thì ma trận A là khả nghịch*

$$A = \begin{bmatrix} C_{12}^2 & . & . & . & C_{12}^k \\ . & . & & & . \\ . & & . & & . \\ . & & & . & . \\ C_{1k}^2 & . & . & . & C_{1k}^k \end{bmatrix}$$

Chứng minh. Vì $\mathcal{G}^1 = [\mathcal{G}, \mathcal{G}]$, nên tồn tại các số thực $\alpha_{12}, \alpha_{13}, ..., \alpha_{1n}, \alpha_{23}, ..., \alpha_{2n}, ..., \alpha_{n-1,n}$ sao cho

$$\begin{aligned} X_2 &= \sum_{1 \leq i < j}^{n} a_{ij}[X_i, X_j] \\ &= \sum_{j=2}^{n} a_{1j}[X_1, X_j] + \sum_{j=k+1}^{n} a_{1j}[X_1, X_j] + \sum_{2 \leq i < j}^{n} a_{ij}[X_i, X_j] \\ &= \sum_{j=2}^{n} a_{1j}[X_1, X_j] + f(\mathcal{G}^2) \end{aligned}$$

Với $f(\mathcal{G}^2)$ là tổ hợp tuyến tính của các véctơ trong cơ sở của $\mathcal{G}^2$. Khi đó $\exists Y_2 \in \mathbb{R}^{k-1}$ sao cho

$$A^t Y_2^t = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Tương tự, tồn tại $Y_3, Y_4, ..., Y_k \in \mathbb{R}^{k-1}$ sao cho

$$A^tY_3^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \end{bmatrix}, ..., A^tY_k^t = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ . \\ . \\ . \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Vì thế, có ma trận thực P sao cho $A^tP = I, I$ là ma trận dơn vị của $M_{k-1}(\mathbb{R})$. Vậy, A^t là ma trận khả nghịch. □

Định lí 2.11. *Cho $\mathcal{G}$ là một không gian véctơ thực n-chiều ($n \geq 3$) sinh bởi cơ sở $(X_1, X_2, ..., X_n)$ sao cho $\mathcal{G}^1$ là không gian con của $\mathcal{G}$ có đối chiều bằng 1 với cơ sở $(X_1, X_2, ..., X_{n-1})$ thì:*

1. *Mỗi ma trận vuông thực khả nghịch A bậc $n-1$ xác định một và chỉ một cấu trúc Lie trên $\mathcal{G}$ sao cho $\mathcal{G}$ là một $MD(n, n-1)$-đại số với ideal dẫn xuất của $\mathcal{G}$ là giao hoán, bằng $\mathcal{G}^1$, và A là ma trận của ánh xạ phụ hợp ad_{X_n} trên $\mathcal{G}^1$ đối với cơ sở $(X_1, X_2, ..., X_{n-1})$.*

2. *Hai ma trận thực khả nghịch A, B bậc $n-1$ xác định hai cấu trúc Lie đẳng cấu trên $\mathcal{G}$ khi và chỉ khi tồn tại số thực c khác không và một ma trận vuông thực khả nghịch C sao cho $cA = CBC^{-1}$.*

TÀI LIỆU THAM KHẢO

1. D. Arnal, M. Cahen and J. Luwig, *Lie groups whose coadjoint orbits are of dimension smaller or equal to two*, Letter in Mathematical Physics, **33**: 183-186, 1995.

2. L. Yu. Galitski and D. A. Timashev, *On classification of metabelian Lie algebras*, Journal of Lie theory, **Vol. 9** (1999), 125156.

3. R. Campoamor-Stursberg, *A note on the classification of nine-dimensional Lie algebras with nontrivial Levi decomposition*, Int. Math. Forum **2**: 25-28 (2007), 13411344.

4. I. Kath, *Nilpotent metric Lie algebras of small dimension*, Journal of Lie theory, **17** (2007), no. 1, 41 - 61.

5. M. T. Duong, G. Pinczon and R. Ushirobira, *A new invariant of quadratic Lie algebras* , Algebras and Representation Theory **15** (2012), 1163-1203.

6. L. A. Vu, *On the foliations formed by the generic K-orbits of the MD4-groups*, Acta Math. Vietnam, No. 2 (1990), 39 - 45.

7. L. A. Vu and K. P. Shum,*On a Subclass of 5-dimentional Solvable Lie Algebras Which Have Commutative Derived Ideal*, Advances in Algebra and Combinatorics, World Scientific Publishing Co. (2008), pp 353 - 371.

8. L. A. Vu, D. Q. Hoa and N. A. Tuan, *K-theory for the Leaf Space of Foliations Formed by the generic K-orbits of a class of Sovable Real Lie Groups*, (to apear in Southeast Asian Bulletin of Mathematics, **38**, 2014.